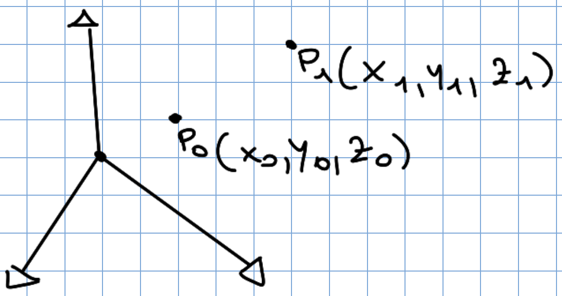
Distanze



$$d(P_0, P_1) = \|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

$A, B \subseteq \mathbb{R}^3$

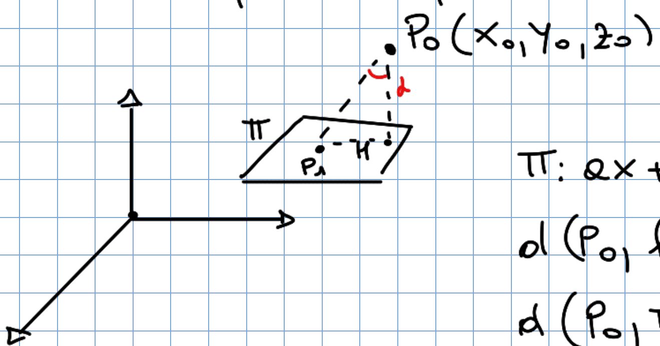
estremo inferiore

$$d(A,B) = \inf\{d(P,Q) : P \in A \text{ e } Q \in B$$

$$A = \left\{\left(\tfrac{1}{n}, 0, 0\right) \quad n \in \mathbb{N}\right\} \qquad B = \{(0,0,0)\} \quad d(P_n, O) = \frac{1}{n}$$

$$d(A,B) =$$

Distanze punto – punto



$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$d(P_0, h) \leq d(P_0, P_1)$$

$$d(P_0, \pi) = d(P_0, H) = |\overline{P_1P_0} \cdot \cos\alpha| =$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$= \left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \frac{n}{\|n\|}\right| =$$

$$= \left|\left[(x_1-x_0)i + (y_1-y_0)j + (z_1-z_0)k\right] \cdot \frac{[ai+bj+ck]}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| =$$

$$\left|\frac{a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1-ax_0-by_0-cz_0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-d-ax_0-by_0-cz_0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\pi : x + y + 1 = 0$

$$d(O,\pi) = \frac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2° modo: Sia r la retta normale a π passante per O

$$r : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

intersezione $r \cap \pi$

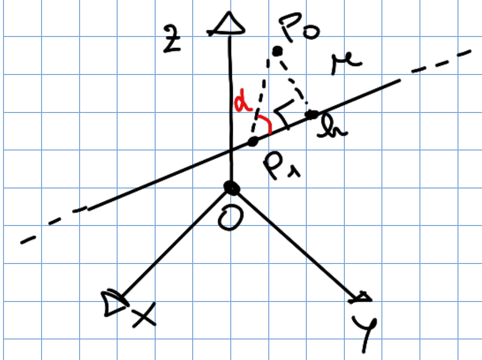
$t + t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

sostituisco e ottengo

$$r \cap \pi = \left\{ \left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 0 \right) \right\}$$

$$d(O,\pi) = d(O,H) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-0\right)^2 + (0-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Distanza punto - retta



$d(P_0, P_1) \geq d(P_0, h)$

$d(P_0, r) = d(P_0, h) = P_0P_1 \cdot \operatorname{sen} d$

$= \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \frac{v_r}{\|v_r\|} \right\|$

v_r = vettore direttivo di r

$$r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \qquad d(O,r)=?$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+0+0=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}+y-z=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z-\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=t-\frac{1}{2} \\ z=t \end{cases} \qquad V_r = 0\cdot i + 1\cdot j + 1\cdot k = j+k$$

$$P_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$d(O,r) = \left\| \overrightarrow{OP_1} \wedge \frac{V_r}{\|V_r\|} \right\| = \left\| \left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j\right) \wedge \frac{(j+k)}{\sqrt{2}} \right\|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\| (i-j) \wedge (j+k) \right\| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left\| \operatorname{Det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\| -i-j+k \right\| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}$$

$$\| \alpha \cdot v \| = \|\alpha\| \cdot \|v\|$$

$$V = V_x i + V_y j + V_z k$$

$$\|V\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

2° Modo: Sia π il piano passante per O e normale a r

Sia $\{H\} = \pi \cap r \Rightarrow d(O,r) = d(O,H)$

$$r: \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=t-\frac{1}{2} \\ z=t \end{cases} \Rightarrow V_r = j+k$$

Equazione di π: $0\cdot(x-0)+1(y-0)+1(z-0)=0$

$\pi: y+z=0$ sostituiamo le eq parametriche

$$t-\frac{1}{2}+t=0 \Rightarrow 2t=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}$$

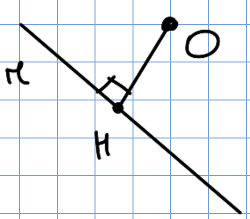
$H = \pi \cap r = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}$

$$d(O, \pi) = d(O, H) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

modo 3:



$P_t = \left(\frac{1}{2}, t - \frac{1}{2}, t \right)$

$\vec{OP_t}$ è perpendicolare a r $\iff$ $\vec{OP_T} \cdot V_r = 0$

$$\left[\frac{1}{2} i + \left(t - \frac{1}{2}\right) j + t \cdot k \right] \cdot [j + k] = 0$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + t \cdot 1 = 0 \iff 2t = \frac{1}{2} \iff t = \frac{1}{4} \Rightarrow H = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

Retta passante per O e incidente e ortogonale a r
[retta per O e per H]

$\pi_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ $\quad$ π_1 e π_2 non paralleli

$\pi_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ $\quad$ $r = \pi_1 \cap \pi_2$ ove

Fascio di piani determinato da π_1 e π_2

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$\mathcal{F}(\pi_1, \pi_2)$ è l'insieme di tutti che contengono la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$

Determinare l'equazione del piano π che contiene

$r: \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ e passa per il punto $P(1,1,1)$

Fascio di piani con s e r

$\lambda(x+2y+z-1)+\mu(x-y-z)=0$

Impongo il passaggio per P: $\lambda(1+2+1-1)+\mu(1-1-1)=0$

Sostituendo $\mu=3\lambda$ nell'equazione del fascio:

$\lambda(x+2y+z-1)+3\lambda(x-y-z)=0$ → Divido per λ e poi moltiplico

$4x-y-2z-1=0$

Determinare l'equazione del piano π che contiene r

$r: \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ e parallelo alla retta $s: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$

$V_s=(i-j+k)\wedge(2i-j-k)=\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}=2i+3j+k$

fascio di piani con asse r

$\lambda(x+2y+z-1)+\mu(x-y-z)=0$

$(\lambda+\mu)x+(2\lambda-\mu)y+(\lambda-\mu)z-\lambda=0$

$n_\pi=(\lambda+\mu)i+(2\lambda-\mu)j+(\lambda-\mu)k$

$\pi // s \iff n_\pi \perp V_s \iff n_\pi \cdot V_s=0$

$2(\lambda+\mu)+3(2\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-\mu)=0$

Trovare un' equazione del piano π che passa per $P(1,2,3)$ ed è ortogonale alla retta $r: \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=2 \end{cases}$

$$r: \begin{cases} y = 1-x \\ z = x-2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = t-2 \end{cases} \quad V_r = i - j + k$$

$$\pi: 1\cdot(x-1) + (-1)(y-2) + 1\cdot(z-3) = 0$$

---

trovare l' equazione del piano α che passa per $P(1,1,1)$ e $Q(2,1,2)$ ed è parallelo alla retta $r: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$

$\vec{PQ} = i + k$ $\qquad V_r = i + 2j + 3k$

s: retta per P e Q: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 1+t \end{cases} \quad \begin{cases} t = x-1 \\ y = 1 \\ t = z-1 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x-1 = z-1 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$

Fascio con asse s:

$$\lambda(x-z) + \mu(y-1) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y - \lambda z - \mu = 0$$

$$n_\pi = \lambda i + \mu j - \lambda k.$$

$\pi \parallel r \Leftrightarrow n_\pi \perp V_r \Leftrightarrow n_\pi \cdot V_r = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2\mu - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda = \mu$

$$\pi: x + y - z - 1 = 0$$